INTORNO AD ALCUNE PROPRIETÀ
DELL' ELICOIDE SGHEMBO
A PIANO DIRETTORE

DEL PROFESSORE

GIUSEPPE BRUNO

TORINO
STAMPERIA REALE
1868.

INTORNO AD ALCUNE PROPRIETÀ

DELL' ELICOIDE SGHEMBO

A PIANO DIRETTORE

DEL PROFESSORE

GIUSEPPE BRUNO

TORINO

STAMPERIA REALE

1868.

INTORNO AD ALCUNE PROPRIETÀ

DELL'

ELICOIDE SGHEMBO A PIANO DIRETTORE.

---

1. Sopra un elicoide sghembo a piano direttore sia segnata una linea arbitraria L: dico che per qualunque punto P di L si può far passare un'altra linea l giacente sull'elicoide dato, ed identica alla linea data L.

Infatti, sia γ la generatrice rettilinea dell'elicoide sulla quale è collocato il punto P, e denotinsi con G e g due altre generatrici rettilinee di quella superficie prese comunque purchè equidistanti dalla γ.

Per natura dell'elicoide, γ, G e g incontrano ad angolo retto la direttrice rettilinea di quella superficie, e gli angoli che la prima di esse tre rette fa con ciascuna delle altre due sono uguali fra di loro. Ossia G e g occupano rispetto a γ la posizione che in un iperboloide sghembo di rivoluzione hanno due generatrici rettilinee appartenenti ad uno stesso sistema e condotte per le estremità di uno stesso diametro del circolo di gola rispetto all'asse dell'iperboloide.

*

Da ciò ne viene che, se l'elicoide fa una semirivoluzione attorno a γ, una generatrice rettilinea qualunque G di esso prende alla fine del moto il luogo che inizialmente aveva un'altra generatrice g della stessa superficie: epperò le posizioni occupate dall'elicoide avanti e dopo la rotazione coincidono fra loro.

Questo premesso, dai singoli punti di L si immaginino abbassate delle perpendicolari sulla γ, e prolungata ciascuna di esse al di là di γ di una quantità uguale a se stessa. Le estremità di questi prolungamenti sono le posizioni prese dai punti corrispondenti della linea L, dopo che l'elicoide ha compiuto il movimento sopraccennato. Il luogo delle dette estremità è dunque la linea l, della quale si voleva provare l'esistenza: poichè esso è sovrapponibile ad L, giace sopra l'elicoide, e passa pel punto P.

2. Ripetendo per ciascun punto della L la costruzione che ora fu fatta rispetto al punto P, si ottengono altre linee tutte identiche ad L e collocate sull'elicoide, delle quali perciò questa superficie è, in generale, il luogo geometrico. In simil modo per ogni punto di l si può descrivere sopra l'elicoide una linea distinta dalla l, ma sovrapponibile a questa, ed il luogo delle linee, che così si hanno, è pure, generalmente, la superficie stessa dell'elicoide. Quindi si scorge che, data una linea qualunque segnata sulla superficie in discorso, per ogni punto di questa superficie si possono ordinariamente condurre sulla medesima due linee distinte fra loro ed identiche alla data.

3. Quando la linea L è tutta contenuta in un piano, la linea l giace interamente in un altro piano: questi piani fanno angoli uguali con γ, e la retta n di loro intersezione è perpendicolare in P alla retta γ.

In altre parole: se, per una retta qualunque n perpendicolare ad una generatrice rettilinea qualunque γ dell'elicoide in un punto qualunque P di essa generatrice, si conducono due piani ugualmente inclinati sulla generatrice medesima, le sezioni da essi determinate nell'elicoide sono linee che possono farsi coincidere fra di loro.

Consideriamo alcuni casi speciali:

La retta n giaccia nel piano tangente all' elicoide nel punto P; allora i piani delle linee L ed l fanno diedri uguali con quel piano tangente. E se di più questi diedri sieno nulli, tutte due le linee ora dette saranno contenute in quel piano tangente, del quale perciò ciascuna delle linee L ed l sarà l'intersezione coll'elicoide. Ora, poichè qualunque di queste due linee, facendo una semirivoluzione attorno a γ, si sovrappone all'altra di esse, ciascuna di loro dovrà essere simmetrica rispetto a γ. Ma si sa d'altronde che ogni piano, il quale contenga la retta γ, è tangente all'elicoide in qualche punto di questa retta: si conchiude pertanto che la intersezione dell'elicoide con un piano qualunque, il quale passi per una generatrice rettilinea arbitraria di quella superficie sghemba, si compone della detta generatrice e di una curva che ha la generatrice stessa per suo asse di simmetria.

In secondo luogo, supponiamo che la retta n sia normale in P all'elicoide. In tal caso le linee L ed l sono sezioni normali in P a quella superficie, le quali, essendo sovrapponibili hanno necessariamente ugual raggio di curvatura nel loro punto comune P. La qual cosa (osservando che una delle sezioni normali dell' elicoide, che separano le regioni di quella superficie che nei dintorni del punto P sono concave da quelle che sono convesse verso una stessa faccia di un piano parallelo al piano

tangente all'elicoide in quel punto, è la retta γ) affinchè sia, si richiede che i piani principali dell'elicoide nel punto P facciano ciascuno angolo semiretto con γ. E quindi ne segue che la superficie, della quale parliamo, non solo ha, come da molto tempo è noto, uguali fra loro i raggi di curvatura delle due sezioni principali in un suo punto qualunque, ma che queste sezioni principali sono curve identiche e sovrapponibili l'una all'altra.

4. Dalla proprietà ora citata, che i due raggi principali di curvatura dell' elicoide in un punto qualunque P di esso sono uguali fra di loro, con facilità si dedusse che le linee di curvatura della detta superficie incontrano ad angolo di 45° tutte le generatrici rettilinee della medesima.

Ciò posto, rappresenti L una delle linee di curvatura dell'elicoide che passano pel punto P: la costruzione, che si eseguisce per dedurre l da L (n° 1), dimostra che l è l'altra linea di curvatura della superficie in discorso e relativa allo stesso punto P. Succede pertanto che, se sull' elicoide si tracciano le due serie di sue linee di curvatura, una linea qualunque della prima serie può farsi coincidere con una linea qualunque della seconda serie: e che perciò tutte le linee di curvatura di quella superficie sono curve identiche fra loro.

5. È noto che fra le superficie rigate la sola che abbia per ogni suo punto i raggi di curvatura uguali in valore assoluto è l'elicoide sghembo a piano direttore. Di questa proposizione esporrò una dimostrazione sintetica che è più semplice delle altre a me conosciute, ed è fondata sullo stesso concetto che ha servito a provare le proposizioni precedentemente riferite.

Per questo, osservato che la superficie dotata della proprietà in discorso, la quale superficie denoterò con Σ,

non può essere sviluppabile, e che perciò essa ha i due raggi di curvatura relativi ad un suo punto qualunque volti in senso contrario, e dette γ una generatrice rettilinea arbitraria della medesima, e δ la generatrice rettilinea di essa superficie che è immediatamente consecutiva alla γ, ossia dista da γ di un infinitesimo di primo ordine, io proverò dapprima la verità della proposizione seguente.

Se la superficie Σ fa una semirivoluzione attorno γ, la retta δ, alla fine di quel moto, prende una posizione β tale, che ogni suo punto m' dista da Σ di un infinitesimo di terzo ordine, e che perciò essa retta β si può ritenere che tutta sia già collocata sulla superficie Σ, e ne costituisca la generatrice rettilinea che precede la γ.

A tal fine sia m il punto della retta δ, che nella semirivoluzione si è portato nel punto m' della retta β; prendasi sulla γ un punto P, la cui distanza da m sia infinitamente piccola di primo ordine, cosa questa sempre possibile; e sieno λ e λ' le sezioni fatte in Σ da due piani normali in P a questa superficie, ugualmente inclinati sulla retta γ, e dei quali il primo passa per m.

Le linee λ e λ' hanno, nel loro punto comune P, entrambe per normale la normale in quel punto a Σ, e per tangenti nel punto stesso due rette contenute in uno stesso piano con γ, e facienti angoli uguali con quest'ultima retta. Epperò quando Σ fa una semirivoluzione attorno γ, la linea λ viene a collocarsi nel piano in cui era inizialmente contenuta la λ', e ad essere tangente in P alla posizione che questa λ' aveva avanti del moto. Inoltre, poichè i raggi principali di curvatura della superficie Σ nel punto P sono uguali fra loro e volti in senso

opposto, le linee λ e λ' avranno pure i loro raggi di curvatura in P di lunghezza uguale fra loro, e disposti l'uno sul prolungamento dell'altro. E quindi, alla fine della soprannominata semirivoluzione, il centro di curvatura di λ relativo al punto P viene a coincidere colla posizione che aveva il centro di curvatura in P di λ' al principio di quel movimento. O, più brevemente, col fare Σ un mezzo giro attorno γ, la linea λ viene a disporsi osculatrice in P alla posizione iniziale di λ'.

Ora la linea λ passa pel punto m, e questo punto col fare una semirivoluzione attorno γ si porta in m'; m' dunque è un punto che appartiene ad una linea osculatrice in P a λ', e che dista da P di un infinitamente piccolo di primo ordine. Questo punto m' dista perciò dalla linea λ', e quindi anche dalla superficie Σ, di un infinitamente piccolo di terzo ordine, come appunto si era detto.

Dal modo col quale si è ottenuto la generatrice rettilinea β della superficie Σ dall'altra generatrice rettilinea δ della stessa superficie, risulta che esse sono disposte rispetto alla generatrice rettilinea intermediaria γ della superficie medesima, come, in un iperboloide sghembo di rivoluzione, lo sono due generatrici rettilinee appartenenti ad uno stesso sistema di generazione, e condotte per le due estremità di uno stesso diametro del circolo di gola rispetto all'asse di rivoluzione dell'iperboloide. E che quindi la superficie Σ è tale che, prese sovr'essa tre generatrici rettilinee consecutive β, γ, δ in maniera che le distanze della seconda di esse alla prima ed alla terza sieno uguali fra di loro ed infinitamente piccole, queste generatrici sono parallele ad uno stesso piano che diremo Q, incontrano una stessa retta perpendicolare al

piano Q la quale chiameremo a, e gli angoli di γ con β e con δ sono uguali fra di loro.

Queste tre proprietà dimostrano che la superficie Σ ha il piano Q per piano direttore, la retta a per una sua linea direttrice, e che essa ammette per altra linea direttrice un'elica segnata sopra una superficie cilindrica di rivoluzione, della quale a sia l'asse. Σ adunque è un elicoide sghembo a piano direttore.

6. Unica anche è la superficie rigata per ogni punto della quale le due sezioni principali sono curve identiche, poichè questa proprietà comprende quella di avere i due raggi di curvatura in un punto qualunque di uguale lunghezza.

Se però la proprietà di avere per sezioni principali due linee sovrapponibili non dovesse essere verificata che per i singoli punti di una linea retta giacente sulla superficie, essa proprietà spetterebbe ad un numero infinito di superficie facilmente determinabili, e fra quelle di 2° grado al paraboloide iperbolico isoscele, il quale ne gode per tutti i punti dell'una e dell'altra delle generatrici rettilinee che passano pel suo vertice.